

Entanglement Measures

Note Title

12/3/2010

اندازه درهم تنیدگی

درهم تنیدگی یک خاصیت غیر رافعی است که بر توان بیان گام، خارق العاده انجام دارد.

گام، خارق العاده = گام، بی در فزاید ملاک غیر ممکن هستند.

شکل : Dense Coding

Teleportation

Cryptography

.....

Entanglement - Assisted Communication

Resource

quantify this Resource

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$$

$$\rho = \frac{5}{6} |\phi^+ \times \phi^+| + \frac{1}{6} |00 \times 00|$$

$LOCC = \text{local operations and}$
 $\text{Classical Communication}$

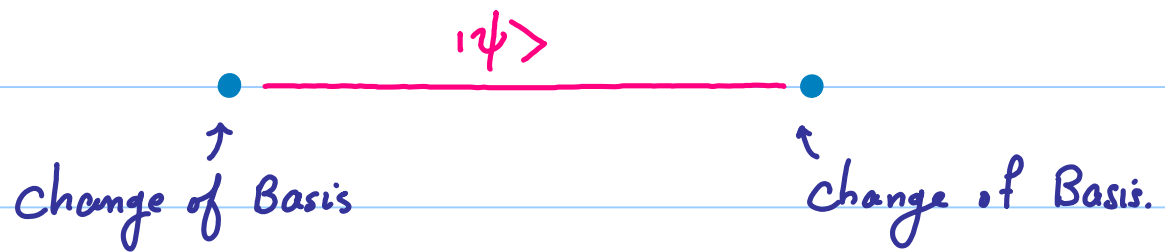
• درم‌تندی د اثر $LOCC$ اثرش نمی‌باشد.



اگر آیس، باب یک حالت ψ داشته باشند، و برآند عمل فابری T را انجام دهند
با حالت ρ هم برآند حال عمل T را انجام دهند.

زیرا، برآند $Locc$ ، ρ ثابت، ψ تبدیل می‌شود، پس عمل T را انجام می‌دهند.

• درم‌تندی د اثر اعمال باید رضی تغییر نمی‌کند.



$$|\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = (I \otimes I) |\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) = (Z \otimes I) |\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) = (X \otimes I) |\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) = (Y \otimes I) |\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0,1} (-1)^{jn} |j, j+m\rangle.$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \zeta^{jn} |j, j+m\rangle \quad \zeta^d = 1.$$

واحد درم تنیدی ✓

حالت ۲ •

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} (|00\rangle + \dots + |d-1, d-1\rangle)$$

بشترین درم تنیده دارند.

$$|\phi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$



$$|\phi_3^+\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle)$$



$$|\phi_{2^n}\rangle \xleftrightarrow{\text{Locc}} |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_i\rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

$$\begin{array}{cc}
 A_1 & B_1 \\
 \bullet & \bullet \\
 \hline
 \bullet & \bullet \\
 A_2 & B_2
 \end{array}
 = |\phi\rangle_{A_1 B_1} \otimes |\phi\rangle_{A_2 B_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(|00\rangle + |11\rangle \right)_{A_1 B_1} \otimes \left(|00\rangle + |11\rangle \right)_{A_2 B_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(|00, 00\rangle + |01, 01\rangle + |10, 10\rangle + |11, 11\rangle \right)_{A_1, A_2, B_1, B_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(|\bar{0}, \bar{0}\rangle + |\bar{1}, \bar{1}\rangle + |\bar{2}, \bar{2}\rangle + |\bar{3}, \bar{3}\rangle \right)_{A, B}$$

$$= \bullet \text{---} \bullet$$

$$\begin{array}{cc}
 \bullet & \bullet \\
 \hline
 \bullet & \bullet
 \end{array}
 \rightarrow \bullet \text{---} \bullet$$

فرآیند برعکس:



$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,2\rangle + |3,3\rangle)_{AB}$$

Coding

$$|0\rangle_A = |0,0\rangle_{A_1 A_2}$$

$$|1\rangle_A = |0,1\rangle_{A_1 A_2}$$

$$|2\rangle_A = |1,0\rangle_{A_1 A_2}$$

$$|3\rangle_A = |1,1\rangle_{A_1 A_2}$$



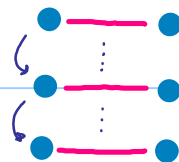
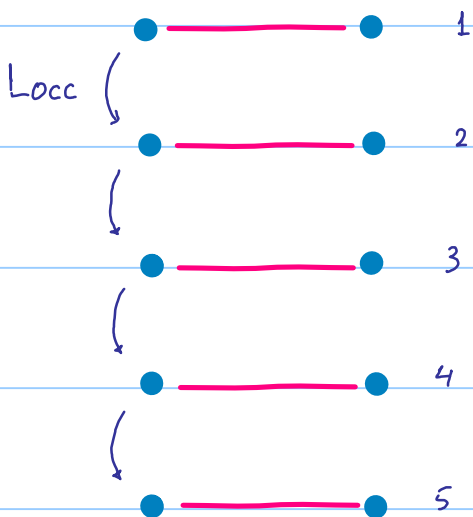
$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2} (|00,00\rangle + |01,01\rangle + |10,10\rangle + |11,11\rangle)_{A_1 A_2, B_1 B_2}$$

$$= \frac{1}{2} (|00,00\rangle + |00,11\rangle + |11,00\rangle + |11,11\rangle)_{A_1 B_1, A_2 B_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{A_1 B_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{A_2 B_2}$$

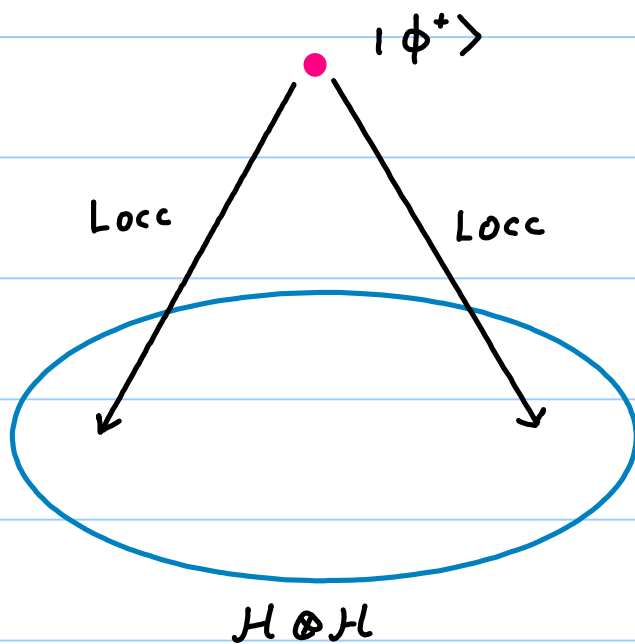


• سوال ۳: آیا LOCC برانه حالت ψ را می‌تواند جداسازی کند؟



• پاسخ: نه!

• است هر حالت؟ مفرد



آیا به محصور یکایه مرتبان
 $|\phi^+\rangle$ با هر حالت دیگر قابل تبدیل است؟

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \longrightarrow |\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle$$

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$(U \otimes V) |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha c & \alpha d & \beta c & \beta d \\ -\alpha d & \alpha c & -\beta d & \beta c \\ -\beta c & -\beta d & \alpha c & \alpha d \\ \beta d & -\beta c & -\alpha d & \alpha c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (x+y)(c+d) = \sqrt{2} \alpha$$

$$(x+y)(c-d) = 0$$

$$(x-y)(c+d) = 0$$

$\Rightarrow$

No Solution.

$$(x-y)(c-d) = \sqrt{2} \beta$$

• $\Rightarrow$ Local realism is not possible.

انجام دارد.

• یک ریش برابر تبدیل حالت $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$: حالت

$$|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

آیس می اندازیم برنا مقادیر محسوس

$$M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 = I$$

انجام مرده. وقت نداره

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| \rightarrow \begin{cases} M_1 \rho M_1^\dagger & \rho_1 = \text{tr}(M_1 \rho M_1^\dagger) \\ M_2 \rho M_2^\dagger & \rho_2 = \text{tr}(M_2 \rho M_2^\dagger) \end{cases}$$

$$M_1 P M_1^\dagger = \frac{1}{2} |\psi_1\rangle \langle \psi_1|$$

$$|\psi_1\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

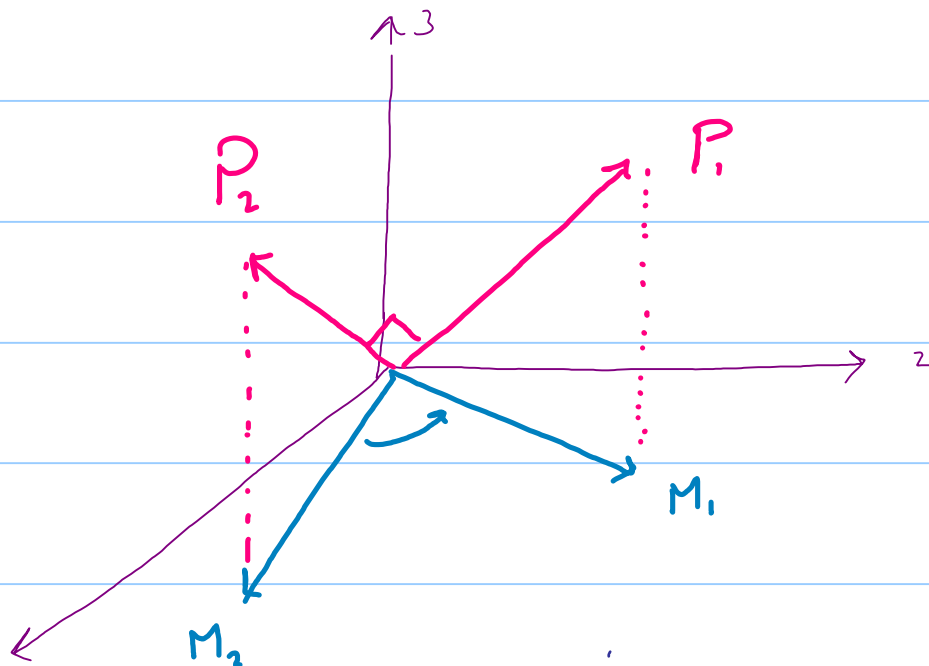
$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$M_2 P M_2^\dagger = \frac{1}{2} |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$$

$$|\psi_2\rangle = \sin\theta |00\rangle + \cos\theta |11\rangle$$

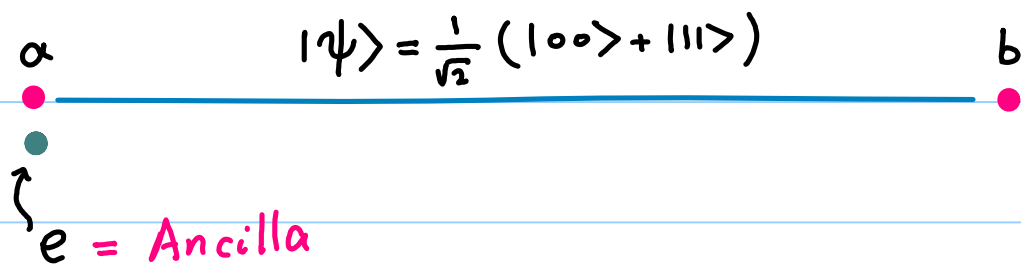
$$P_2 = \frac{1}{2}$$

• قضیه Nymark : هر اندازه برابر، مقادیر برای آن کمترین اندازه برابر مقادیر فضایی باشد.
بالاتر به دست آمده.



• ارزش عملی Locc بر تبدیل فرق:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$



 $e = \text{Ancilla}$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{ab} |0\rangle_e$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{ae} |0\rangle_b + |10\rangle_{ae} |1\rangle_b) \xrightarrow{U_{ae}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{\theta} |00\rangle + S_{\theta} |01\rangle)_{ae} |0\rangle_b +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S_{\theta} |10\rangle + C_{\theta} |11\rangle)_{ae} |1\rangle_b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{\theta} |00\rangle + S_{\theta} |11\rangle)_{ab} |0\rangle_e +$$

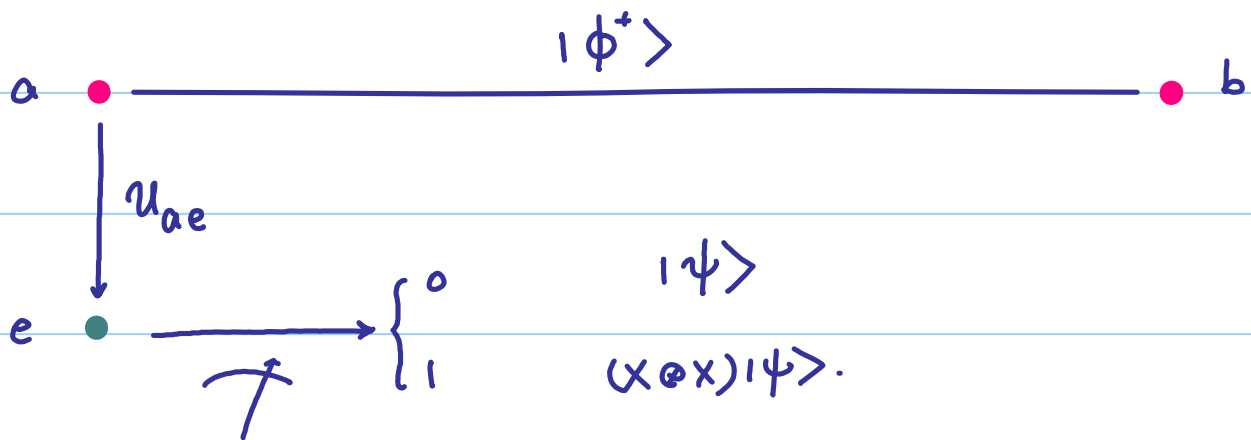
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S_{\theta} |00\rangle + C_{\theta} |11\rangle)_{ab} |1\rangle_e$$

$$U_{ae} : |00\rangle \rightarrow \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \sin\theta |10\rangle + \cos\theta |11\rangle$$

$$U_{ae} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= |0\rangle\langle 0| \otimes U(\theta) + |1\rangle\langle 1| \otimes U(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

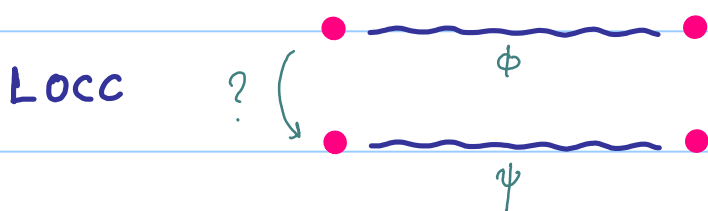


نمونه: شکل دهید؛ LOCC مرتبک حالت $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$

ل به حالت $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle + \gamma|22\rangle$ تبدیل کند.

• سوال: آیا یک حالت دستخ $|\phi\rangle$ و مرتان یک حالت دستخ دیگر

مثل $|\psi\rangle$ تبدیل که؟ البته فقط به تبدیل LOCC؟



تجزیه است

• پاسخ: فقط به حالت در خالص به پنج درجه دارد.

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i |\mu_i, \tilde{\mu}_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \beta_i |\nu_i, \tilde{\nu}_i\rangle$$

ضرایب است

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_d$$

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d$$

• $|\phi\rangle$ و مرتان با حالت $|\psi\rangle$ تبدیل که اگر متفاوت

$$[\beta] \leq [\alpha]$$

$$\beta_1 \leq \alpha_1$$

$$\beta_1 + \beta_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

: $\mathcal{H}_0$ •

$$|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$\lambda_\phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\lambda_\psi = \{ \cos\theta, \sin\theta \}$$

$$\phi \xrightarrow{\text{Loc.}} \psi \quad \text{possible.}$$

$$\phi \xleftarrow{\text{Locc}} \psi \quad \text{impossible.}$$

• البته در حالت یک پیکسل احتمالی تغییر کند. $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ با p تبدیل شوند.
تبدیل شوند: p بزرگترین مساحت که در هر یک از حالت‌ها:

$$p\{\lambda_\psi\} \leq \{\lambda_\phi\}$$

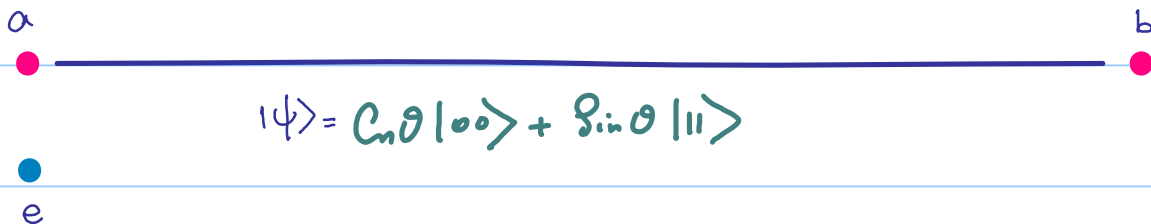
$$|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle, \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad \text{مثال}$$

$$\lambda_\psi = \{\cos\theta, \sin\theta\} \quad \lambda_\phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$p \cos\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2} \cos\theta}$$

• کب بیش اتحادی برقرار است



$$|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{ab} |0\rangle_e = (\cos\theta |00\rangle_{ab} + \sin\theta |11\rangle_{ab}) |0\rangle_e$$

$$= \cos\theta |00\rangle_{ae} |0\rangle_b + \sin\theta |10\rangle_{ae} |1\rangle_b$$

$$\xrightarrow{U_{ae}} \cos\theta (a|00\rangle_{ae} + b|01\rangle_{ae}) |0\rangle_b + \sin\theta (c|10\rangle_{ae} + d|11\rangle_{ae}) |1\rangle_b$$

$$= (a\cos\theta |00\rangle_{ab} + c\sin\theta |11\rangle_{ab}) |0\rangle_e + (b\cos\theta |00\rangle_{ab} + d\sin\theta |11\rangle_{ab}) |1\rangle_e$$

$$U = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{bmatrix}$$

$$\text{let } \begin{cases} a = \sin\theta \\ c = \cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \cos\theta \\ d = \sin\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow |\psi\rangle = \sqrt{2} \sin\theta \cos\theta |\phi^+\rangle_{ab} |0\rangle_e + (\cos^2\theta |00\rangle_{ab} + \sin^2\theta |11\rangle_{ab}) |1\rangle_e$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اندازه های } |0\rangle, |1\rangle \\ \text{در } e \end{array} \right\} \begin{array}{ll} |\phi^+\rangle_{ab} & \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \quad \text{جل} \\ \frac{\cos^2\theta |00\rangle + \sin^2\theta |11\rangle}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}} & 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \quad \text{بازماند} \end{array}$$

حالت دبی که نمی توان آن را با هم مقایسه کرد:

Neither ψ_1 nor ψ_2 majorizes the other.

تقریب: نشان دهیم که هیچ یک در دیگری - حتی حالت دبی - قرار نمی گیرند.

تقریب: مثالی از دو حالت غیر قابل مقایسه ارائه کنید.

- بنابراین اگر قرار بر دستکاری حالت در مقیاس بزرگ یعنی تعداد حالت ها 2^n و n بسیار بزرگ باشد

رابطه ϵ $\rightarrow 0$ $\rightarrow$ این مشکل در حد مجانبی رفع می شود.

دستکاری حالت ؟ در حد مجانبی

Manipulation of States in the Asymptotic limit

Entanglement Distillation $E_D(\rho)$

حالت در زیر نظر بگیریم:

$$|\phi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

$$\rho = (1-p) |\phi^+ \rangle \langle \phi^+| + p |00\rangle \langle 00|$$

یا به طور کلی:

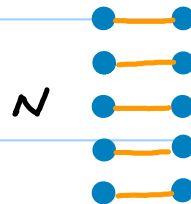
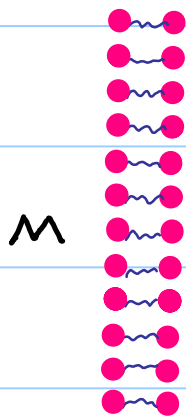
$$\rho = \sum_{ij} r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$$



- سوال ۳: اگر ۱۰۰۰ حالت ρ داشته باشیم چند حالت ρ می توانیم از آن ها تهیه کنیم؟

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$





$$M > N$$

$$\rho^{\otimes M} \longrightarrow (\lvert \phi \rangle \langle \phi \rvert)^{\otimes N}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \max_{\mathcal{P}_r} \left(\frac{N}{M} \right) =: E_D(\rho)$$

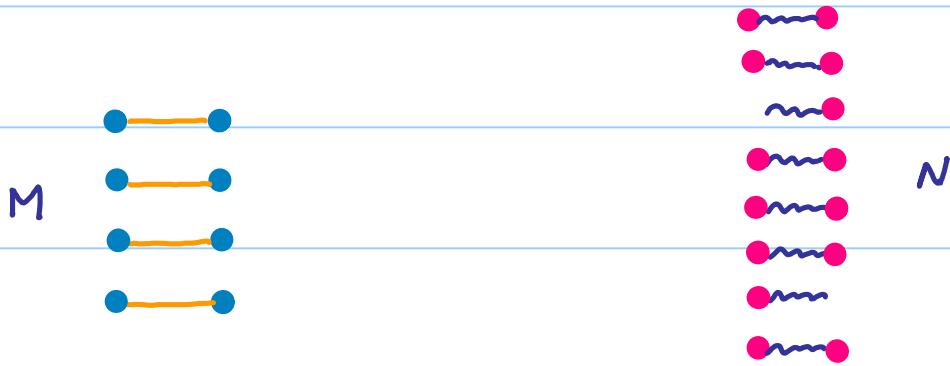
$$M : \rho \longrightarrow M E_D(\rho) : \lvert \phi^+ \rangle$$

$$\rho^{\otimes M} \longrightarrow (\lvert \phi^+ \rangle \langle \phi^+ \rvert)^{\otimes M E_D(\rho)}$$

$$\text{Entanglement Cost } E_C(\rho)$$

می بیند:

• برابری کردن ... ۱، حالت ρ چند، حالت بل احتیاج داریم؟



$$M < N$$

$$\mathcal{E}_c(\rho) := \lim_{\frac{M}{N} \rightarrow \infty} \min_{\mathcal{P}_r} \left(\frac{M}{N} \right)$$

$$\mathcal{P}_r = \text{Locc}$$

$$M \in |\phi^+ \times \phi^+| \xrightarrow{\text{Locc}} \frac{M}{\mathcal{E}_c(\rho)} \in \rho$$

$$(|\phi^+ \times \phi^+|)^M \xrightarrow{\text{Locc}} \rho^{\otimes \frac{M}{\mathcal{E}_c(\rho)}}$$

• قضیه: $E_c(\rho) \geq E_D(\rho)$.

• اثبات: بردن خلف: فرض نده $E_c(\rho) < E_D(\rho)$

$$M, |\phi^+\rangle \longrightarrow \frac{M}{E_c(\rho)}, \rho$$

Locc

$$\left(\frac{M}{E_c(\rho)}\right) E_D(\rho), |\phi^+\rangle$$

$$\text{if } E_c(\rho) < E_D(\rho) \rightarrow$$

فقط Locc ترسیم حالت در $|\phi^+\rangle$ کنیم.

• مک قضیه ۳: که فقط بر حالت خالص کار نمی‌برد است.

$$E_D(|\psi\rangle) = E_C(|\psi\rangle) = S$$

↑
von Neumann Entropy

$$S = -\text{tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\text{tr}(\rho_B \ln \rho_B).$$

$$|\psi_1\rangle^{\otimes M_1} \longrightarrow |\psi_2\rangle^{\otimes M_2}$$

$$M_1 S(\psi_1) = M_2 S(\psi_2).$$

• بهر سیت در آینده، فرم سته بهر E_D ؛ فوکل پیوند است.
 بهر سته از حالت در آینده، فرم سته بهر E_D ، جردله. مثلات زیر:

$$\rho_B = (1-F) |\phi^+ \chi \phi^+| + F |\phi \chi \phi|$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle).$$

$$E_D(P_B) = -F \log_2 F - (1-F) \log_2 (1-F).$$

• خبر بد: در حالت کلی حتی معلوم نیست که آیا یک حالت ρ تقطیر پذیر است؟

• شرط لازم برای تقطیر پذیری: $\rho^{T_A} \leq 0$.

$$\rho^{\otimes M} \xrightarrow{\text{Locc}} (\phi^+ \otimes \phi^+)^{\otimes N}$$

• اثبات:

$$|\phi^+ \otimes \phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(|\phi^+ \otimes \phi^+\rangle)^{T_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (|\phi^+ \otimes \phi^+\rangle)^{T_A} \leq 0$$

$$\rightarrow [(\phi^+ \otimes \phi^+)^{\otimes N}]^{T_A} \leq 0$$

$$[Locc(\rho)]^{T_A} > 0 \leftarrow \rho^{T_A} > 0 \quad \text{نادر}$$

$$\rho' = Locc(\rho) \rightarrow \rho' = (A \otimes B) \rho (C \otimes D)$$

$$\rho'^{T_1} = (C^T \otimes B) \rho^{T_1} (A^T \otimes D)$$

$$\text{We have. } C = A^\dagger, \quad D = B^\dagger \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho'^{T_1} &= (A^* \otimes B) \rho^{T_1} (A^T \otimes B^\dagger) \\ &= (A \otimes B) \rho^{T_1} (A^\dagger \otimes B^\dagger) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Spectrum}(\rho'^{T_1}) = \text{Spectrum}(\rho^{T_1})$$

نادرترین $\rho^{T_1} > 0$ باشد، که $Locc$ نیز $\rho'^{T_1} > 0$ خواهد بود، بنابراین

دستم‌نویس ← به چاک‌نتر

if ρ is PPT $\Rightarrow$ $\text{Locc}(\rho)$ is PPT.

نابری NPT یعنی شرط لازم برای تقطیرپذیری است.

• فقط برای ابعاد کم، یعنی بعد 2×3 یک شرط کافی و لازم برای تقطیرپذیری وجود دارد.
در تقطیرپذیری اگر فقط از $\rho^{\otimes n}$.

• شرط کافی برای تقطیرپذیری است $d \times d$. (Horodecki)

if $\rho^A \otimes 1 - \rho < 0 \rightarrow \rho$ is distillable.

• مثال: $\rho = F |\phi^+ \times \phi^+| + (1-F) \frac{1 \otimes 1}{d^2}$

Spectrum of ρ :

$$\begin{cases} |\phi^+\rangle : & F + \frac{(1-F)}{d^2} & 1 \\ |\phi^{+\perp}\rangle : & \frac{1-F}{d^2} & d^2 - 1. \end{cases}$$

Since $\rho \geq 0 \rightarrow 0 < F < 1$

$$\rho^A = F \frac{1}{d} \mathbb{I} + (1-F) \frac{1}{d} = \frac{1}{d}$$

$$\begin{aligned} \rho^A \otimes 1 - \rho &= \frac{1 \otimes 1}{d} - (1-F) |\phi^+ \rangle \langle \phi^+| - \frac{F}{d^2} 1 \otimes 1 \\ &= \frac{(d-F)}{d^2} 1 - (1-F) |\phi^+ \rangle \langle \phi^+|. \end{aligned}$$

$$: \rho^A \otimes 1 - \rho \text{ is } \dot{\rho}$$

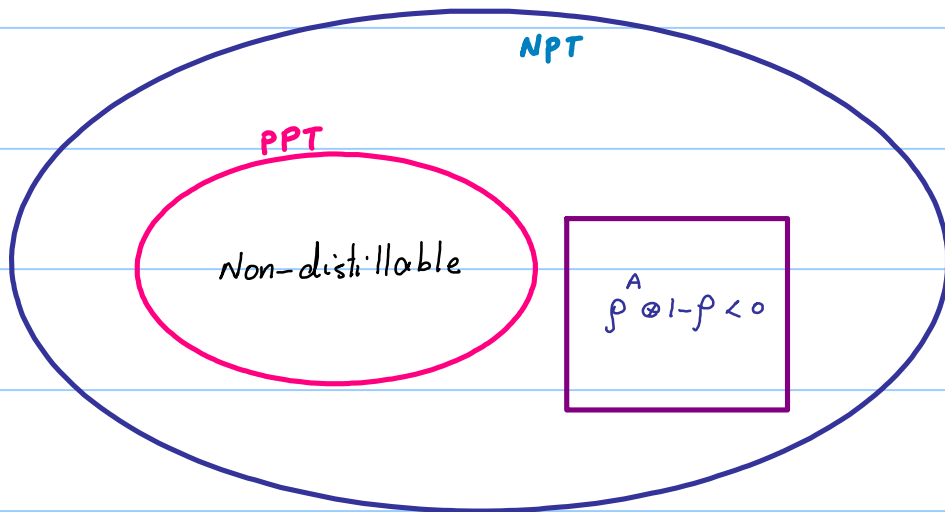
$$|\phi^+\rangle : \frac{d-F}{d^2} - (1-F)$$

$$|\phi^{+\perp}\rangle : \frac{d-F}{d^2}$$

Negative eigenvalue: $\frac{d-F}{d^2} - (1-F) < 0$

$$\rightarrow d-F < (1-F)d^2 \rightarrow F(d^2-1) < d^2-d$$

$$\rightarrow F(d+1) < d \rightarrow \boxed{- \leq F < \frac{d}{d+1}}$$



1) Filtering Protocols.

روش، در تغییر پذیری



فرض کنید a, b حالت زیر را دارند.

$$\rho = F |\psi \times \psi\rangle + (1-F) |00 \times 00\rangle.$$

که بدان:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

ی خراهنایی حالت a, b حالت $|\psi \times \psi\rangle$ تغییر کند.

$$O_A = \sqrt{F} |0 \times 0\rangle + |1 \times 1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O_B = O_A$$

$$O'_A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O'_B$$

$$\rho' = (O_A \otimes O_B) \rho (O_A \otimes O_B)$$

$$O_A |0\rangle = \sqrt{\epsilon} |0\rangle, \quad O_A |1\rangle = |1\rangle$$

$$(O_A \otimes O_B) |\psi\rangle = \sqrt{\epsilon} |\psi\rangle$$

$$\rightarrow \rho'_{un} = \{ \epsilon F |\psi\rangle\langle\psi| + \epsilon^2 (1-F) |00\rangle\langle 00| \}$$

↪ un-normalized.

$$\text{tr}(\rho'_{un}) = \epsilon F + \epsilon^2 (1-F)$$

$$\rightarrow \rho' = \frac{F}{F + \epsilon(1-F)} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{\epsilon(1-F)}{F + \epsilon(1-F)} |00\rangle\langle 00|$$

$$F' = \langle \psi | \rho' | \psi \rangle = \frac{F}{F + \epsilon(1-F)}$$

$$\mathcal{P} = \text{tr}((O_A \otimes O_B) \rho (O_A \otimes O_B)) = \text{tr}(\rho'_{un}) = \epsilon F + \epsilon^2 (1-F)$$

$$F \longrightarrow F' = \frac{F}{F + \epsilon(1-F)}, \quad p = \epsilon F + \epsilon^2(1-F)$$

$$\text{if } \epsilon \ll 1 \rightarrow F' \approx 1 \quad \text{but} \quad p \approx \epsilon F$$

نبارنی دحل در اول بر اول مات

$$p = F | 14 \times 41 + (1-F) | 00 \times 00 |$$

ب ۱۴×۴۱ به یک در اول مات در واقع $p = \epsilon F$ نیز F نیز

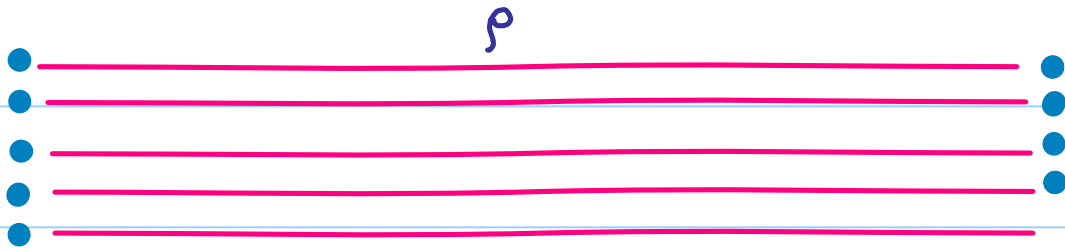
p به نصف خروجی

$$\text{if } F = \frac{1}{2} \rightarrow F' = \frac{1}{1+\epsilon} \quad p = \frac{\epsilon}{2}$$

$$F_{n+1} = \frac{F_n}{F_n + \epsilon(1-F_n)}$$

$$F^* = \frac{F^*}{F^* + \epsilon(1-F^*)} \Rightarrow F^* = 1$$

● Recurrence Protocols.



هر یک حالت پانزده ای درستی است.

- [7] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996); C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

● متداتی درباره حالت های Bell.

$$|\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,m\rangle + (-1)^n |1,\bar{m}\rangle)$$

	$K_1 = X \otimes X$	$K_2 = Z \otimes Z$
$ \phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle + 11\rangle)$	1	1
$ \phi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle - 11\rangle)$	-1	1
$ \phi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle + 10\rangle)$	1	-1
$ \phi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle - 10\rangle)$	-1	-1

$$K_1 |\phi_{mn}\rangle = (-1)^n |\phi_{mn}\rangle \quad K_2 |\phi_{mn}\rangle = (-1)^m |\phi_{mn}\rangle$$

• این حالت ها، درم تئیه، برای عملیات با ۲ مقادیر به هم فشار در تئیه است می دهند.

• یک حالت دلخواه را برای تئیه بر حسب این حالت ها به داد.

$$\rho = \sum_{\substack{mn \\ m'n'}} \lambda_{mn, m'n'} |\phi_{mn}\rangle \langle \phi_{m'n'}|$$

• قضیه: با اعمال رفسی حرار بر توان این حالت ρ به شکل زیر می آید:

$$\rho_{\text{Werner}} = \rho_w = \alpha |\phi\rangle\langle\phi| + \frac{1-\alpha}{4} I.$$

• در این اعمال رفسی ثابت ρ به $|\phi\rangle\langle\phi|$ ثابت باقی می ماند.

• اثبات: اگر آیس باب به اعمال $\frac{1}{2}$ اعمال رفسی I, K_1 و K_2 بر حالت زیر انجام دهند:

$$\frac{1}{2}(\rho + K_1 \rho K_1^\dagger) = \sum_{\substack{m,n \\ m',n'}} \lambda_{mn,m'n'} \left(\frac{1 + (-1)^{n+n'}}{2} \right) |\phi_{mn}\rangle\langle\phi_{m'n'}|$$

This operation makes $n=n' \rightarrow$

اگر باب اعمال $\frac{1}{4}$ اعمال $K_1, K_2, K_1 K_2$ و I انجام دهند ρ تبدیل می شود:

$$\frac{1}{4}(\rho + K_1 \rho K_1^\dagger + K_2 \rho K_2^\dagger + K_1 K_2 \rho K_2^\dagger K_1^\dagger)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{mn} \lambda_{mn, mn} |\phi_m \otimes \phi_n|.$$

نیابراین آلیس، باب می‌توانند با یکال ریخی ρ به حالت قطری درآورند.

• آلیس و باب از این ρ می‌توانند فراتر روند، با یکال ریخی می‌توانند حالت ρ به ρ_0 حالت زیر کنند:

$$\rho = F |\phi_0 \otimes \phi_0| + (1-F) \frac{I}{4}.$$

• این حالت حالت Werner خوانده می‌شود، ویژگی است بین معیار:

$$(U \otimes U^*) \rho (U \otimes U^*)^\dagger = \rho \quad \forall U \in SU(2)$$

• ثابت کنید $\langle \phi | (U \otimes U^*) | \phi \rangle = 1$ ، خاصیت فوق لازم نیست به نظر می‌رسد.

• ارزش تبدیل حالتِ قطری به حالتِ درخت.

$$\rho' = \int du \ (u \otimes u^*) \rho (u \otimes u^*)^{\dagger}$$

$$du = d(gu) \quad g \in SU(2)$$

$\uparrow$
Invariant measure.

$$(g \otimes g^*) \rho' (g \otimes g^*)^{\dagger} = \int du \ (g \otimes g^*) (u \otimes u^*) \rho (u \otimes u^*)^{\dagger} (g \otimes g^*)^{\dagger}$$

$$= \int du \ (gu \otimes (gu)^*) \rho (gu \otimes (gu)^*)^{\dagger}$$

$$du = dgu \quad = \int dv \ (v \otimes v^*) \rho (v \otimes v^*)^{\dagger} = \rho'$$

So $\rightarrow \rho'$ is isotropic

$$\rightarrow \rho' = \alpha |\phi_{\text{..}} \times \phi_{\text{..}}| + \beta \frac{I}{4}$$

• تبدیل می ده آیس باب انجام مردهند نشا به حالت اولیه ρ به $|\phi \times \phi|$ تغییر نی دصد.

• تمرین: این منابع را نسبت کند.

بنابرین می شه ای که بیان در هر سیستم این است که این حالت های مثل حالت زیر حالت $|\phi\rangle$ را تعقیب کنه.

$$\rightarrow \rho_{\omega} = \alpha |\phi \times \phi| + (1-\alpha) \frac{I}{4}$$

فیدیه بین حالت با $|\phi\rangle$ برابر است با:

$$F = \alpha + \frac{1-\alpha}{4} = \frac{1+3\alpha}{4}$$

هدف، آن است که به با توجه به هر که بحال $Locc$ ، F را زیاد کنیم به مقدار ابرین.

• مرحله تغلیط حالت در زیر حالت $|\phi_{00}\rangle$.

• تمرین: نشان دهید رابطه زیر صحیح است.

$$C^{A_1 \rightarrow A_2} C^{B_2 \rightarrow B_1} |\phi_{mn}\rangle_{A_1 B_1} |\phi_{pq}\rangle_{A_2 B_2} = |\phi_{m, n+q}\rangle_{A_1 B_1} |\phi_{p+m, q}\rangle_{A_2 B_2}$$

منظور از $C^{A_1 \rightarrow A_2}$ یک عمل CNOT است که بیت کنترل تنها آن A_1 است.
بیت هدف آن A_2 است.

نمایش این اثر به طور خلاصه به این صورت است:

$$|\phi_{mn}\rangle \otimes |\phi_{pq}\rangle =: \rho_{mn}$$

آنها:

$$C^{A_1 \rightarrow A_2} C^{B_2 \rightarrow B_1} : \rho_{mn} \otimes \rho_{pq} \longrightarrow \rho_{m, n+q} \otimes \rho_{p+m, q}$$

حالت اولیه در زیر شکل قابل بازسازی است:

$$\rho = \alpha \rho_{00} + (1-\alpha) \frac{I}{4} = \frac{1+3\alpha}{4} \rho_{00} + \frac{1-\alpha}{4} (\rho_{01} + \rho_{10} + \rho_{11})$$

در نتیجه برابر دوی لنزنی حالت داریم:

$$\begin{aligned} \rho^{A_1 B_1} \otimes \rho^{A_2 B_2} &= \left(\frac{1+3\alpha}{4}\right)^2 \rho_{00} \otimes \rho_{00} + \\ &\frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \{ \rho_{00} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{10} + \rho_{10} \otimes \rho_{11} \} + \\ &\frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \{ \rho_{01} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{01} \} + \\ &\left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2 \{ \rho_{01} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{11} + \rho_{11} \otimes \rho_{10} + \\ &\rho_{10} \otimes \rho_{01} + \rho_{00} \otimes \rho_{10} + \rho_{00} \otimes \rho_{11} + \\ &\rho_{11} \otimes \rho_{00} + \rho_{01} \otimes \rho_{11} + \rho_{01} \otimes \rho_{10} \} \end{aligned}$$

• مرطالول: Alice, Bob به ترتیب اعمال $C^{A_1 \rightarrow A_2}$, $C^{B_2 \rightarrow B_1}$

ما اینم مردصد حالت زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \rho \rightarrow & \left(\frac{1+3\alpha}{4}\right)^2 \rho_{00} \otimes \rho_{00} + \\
 & \frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \left\{ \rho_{00} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{10} + \rho_{10} \otimes \rho_{11} \right\} + \\
 & \frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \left\{ \rho_{01} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{01} \right\} + \\
 & \left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2 \left\{ \rho_{01} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{11} + \rho_{11} \otimes \rho_{10} + \right. \\
 & \quad \rho_{10} \otimes \rho_{01} + \rho_{00} \otimes \rho_{10} + \rho_{00} \otimes \rho_{11} + \\
 & \quad \left. \rho_{11} \otimes \rho_{00} + \rho_{01} \otimes \rho_{11} + \rho_{01} \otimes \rho_{10} \right\}
 \end{aligned}$$

• مرحله دوم: آیس و ب ب حریم همگر x را اندازه گیری کنیم. اگر نتایج آنها هم یک نباشد، حالت را نگاه می‌داریم.

یادماند:

	$x \otimes x$
$ \phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle + 11\rangle)$	1
$ \phi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle - 11\rangle)$	-1
$ \phi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle + 10\rangle)$	1
$ \phi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle - 10\rangle)$	-1

انہی ماہرین معنی بہت درجہ حالت ρ ، عبوری مثل $\rho_{ij} \otimes \rho_{k0}$

رابطہ دلیہ، عبوری مثل $\rho_{ij} \otimes \rho_{k1}$ لکھیں

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow & \left(\frac{1+3\alpha}{4}\right)^2 \rho_{00} \otimes \rho_{00} + \\ & \frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \left\{ \rho_{00} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{10} + \rho_{10} \otimes \rho_{11} \right\} + \\ & \frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \left\{ \rho_{01} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{01} \right\} + \\ & \left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2 \left\{ \rho_{01} \otimes \rho_{00} + \rho_{11} \otimes \rho_{11} + \rho_{11} \otimes \rho_{10} + \right. \\ & \quad \left. \rho_{10} \otimes \rho_{01} + \rho_{10} \otimes \rho_{10} + \rho_{00} \otimes \rho_{11} + \right. \\ & \quad \left. \rho_{11} \otimes \rho_{00} + \rho_{01} \otimes \rho_{11} + \rho_{01} \otimes \rho_{10} \right\} \end{aligned}$$

حالت نہائی : ρ

$$\rho' \propto \left\{ \left(\frac{1+3\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2 \right\} \rho_{00} + 2 \left(\frac{1-\alpha}{4}\right)^2 \left\{ \rho_{01} + \rho_{11} \right\} + 2 \frac{1+3\alpha}{4} \frac{1-\alpha}{4} \rho_{10}$$

پس لہ نہایتگی :

$$P' = \frac{[(1+3x)^2 + (1-x)^2] P_{\infty} + 2(1-x)^2 (P_{01} + P_{10}) + 2(1+3x)(1-x) P_{10}}{(1+3x)(3+x) + 5(1-x)^2}$$

$$F' = \frac{(1+3x)^2 + (1-x)^2}{(1+3x)(3+x) + 5(1-x)^2} \quad F = \frac{1+3x}{4}$$

$$F' = \frac{F^2 + \left(\frac{1-F}{3}\right)^2}{F^2 + 2F\left(\frac{1-F}{3}\right) + 5\left(\frac{1-F}{3}\right)^2}$$

$$\text{if } F = \frac{1}{2} \longrightarrow F' = \frac{1}{2}$$

$$\text{if } F = \frac{2}{3} \longrightarrow$$

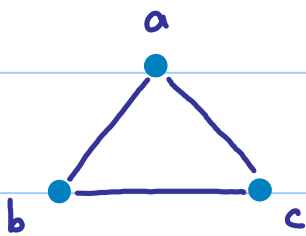
Multi-Partite Systems

سیستم چند بخشی

No Schmidt Decomposition

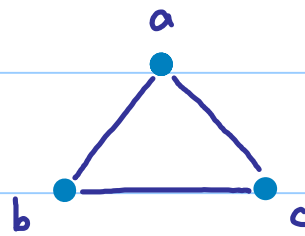
صحیح شرط لازم ریاضی برابر تبدیل حالت؟ به دیگر وجود ندارد.

بهر بیش از سه قسمت، دو حالت متفاوت لایق تبادل با احتمال غیر صفر هم تبدیل می شود.



GHZ

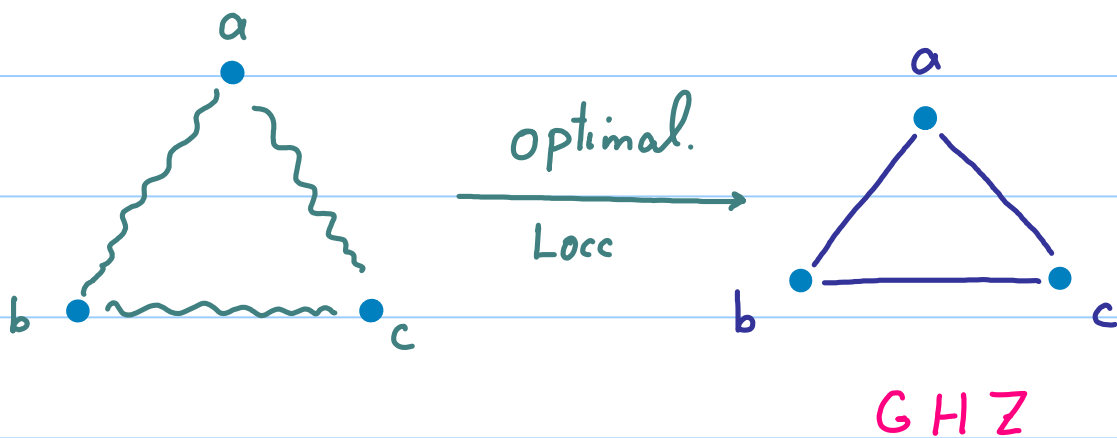
No Locc



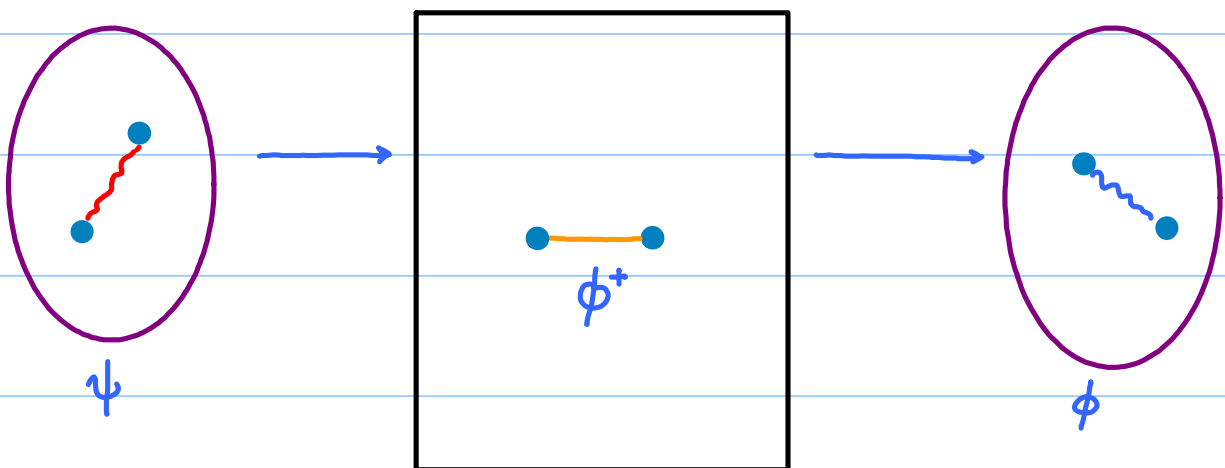
W

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

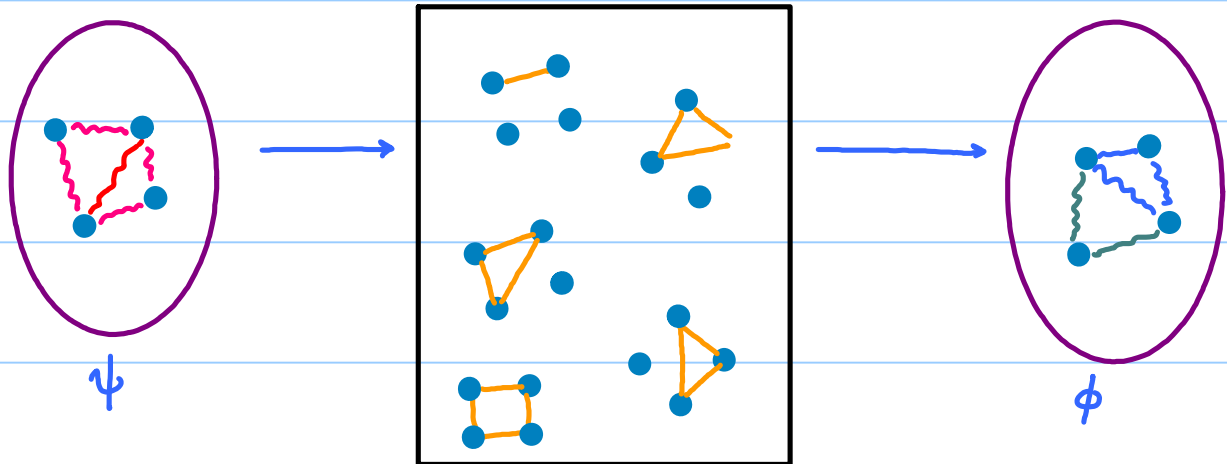
$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$$



Bi-partite. $\text{edge } (i,j) \in E$



Multi-partite. چند ذره ای



To be Continued.

انرژی: درج تندی

$\mathcal{E}_c$ = Entanglement Cost

$\mathcal{E}_D$ = Entanglement of Distillation

$\mathcal{E}_R$ = Relative Entropy of Entanglement.

$\mathcal{E}_s$ = Squashed entanglement